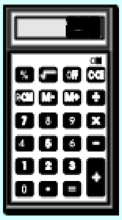
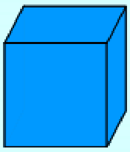
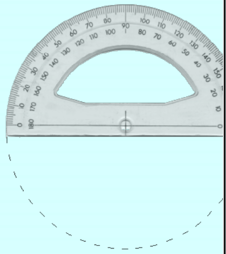
mathématiques 10e année

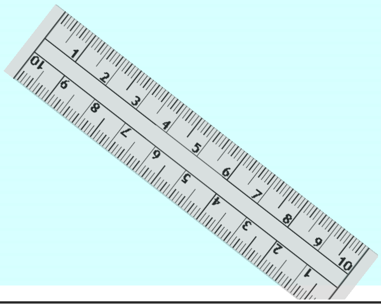






Salle 108
Mme Barton

le mercredi 26 septembre 2018



Chapitre 4
Les racines et les puissances

But du cours: AN2

Démontre une compréhension des nombres irrationnels. On peut représenter, identifier, simplifier et placer en ordre les nombres irrationnels.

Travail à remettre:

Page 221

Questions 1 à 4 et

6, 7, 9, 11

Page 211

Questions 10, 11, 12

Page 218

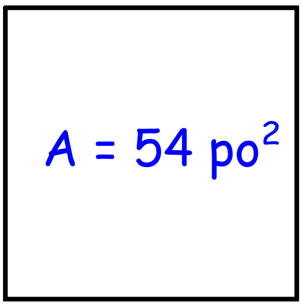
Question

16

Page 218
Question 16

16. Un carré a une aire de 54 pouces carrés. Détermine le périmètre du carré. Écris la réponse sous la forme d'un radical simplifié.

16. Un carré a une aire de 54 pouces carrés. Détermine le périmètre du carré. Écris la réponse sous la forme d'un radical simplifié.



Périmètre = ??

16. Un carré a une aire de 54 pouces carrés. Détermine le périmètre du carré. Écris la réponse sous la forme d'un radical simplifié.

$A = 54\ po^2$

x

Périmètre = ??

$x = \sqrt{54}$

$x = \sqrt{9 \cdot 6}$

$x = 3\sqrt{6}$ po

$P = 4 \cdot 3\sqrt{6}$

$\boxed{P = 12\sqrt{6} \text{ pouces}}$

Chapitre 4
Les racines et les puissances

But du cours: AN3

Démontre une compréhension des puissances comportant des exposants rationnels et les radicaux.

Appris en 9e année:

L'exposant zéro

Tout nombre (autre que zéro) élèvé à l'exposant zéro est égale à 1.

Appris en 9e année:

L'exposant zéro

Tout nombre (autre que zéro) élèvé à l'exposant zéro est égale à un (1).

Exemples: 1) $7^0 = 1$

2) $(-9)^0 = 1$

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

Autres exemples:

$250\ 000^0 = 1$

$-5^0 = -1$

-5^0
$-(1)$

$-(4,6)^0 = -1$

$-(4,6)^0$
$-(1)$

$(-6,3)^0 = 1$

Appris en 9e année:

Multiplier les puissances

Pour multiplier deux (ou plusieures) puissances qui ont la même base, on copie la base et on additionne les exposants.

$5^2 \times 5^4 \times 5^6 = 5^{12}$

$(-4)^3 \times (-4) \times (-4)^2 \times (-4)^5 = (-4)^{11}$

$2^3 \times 3^2 = 72$
8×9

$3^2 + 3^4 = 90$
$9 + 81$

1) $(-3)^5 \times (-3)^3 = (-3)^8$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^9$

3) $6^8 \times 6 = 6^9$

4) $(-4)(-4)^3 = (-4)^4$

5) $2^2 \times 2^4 \times 2^3 = 2^9$

6) $(-3) \times (-3)^5 \times (-3)^6 = (-3)^{12}$

Fais cette multiplication.

Qu'est-ce que ça veut dire si les exposants sont les fractions?

$$5^{\frac{1}{2}} \bullet 5^{\frac{1}{2}}$$

$5^{1/2} \cdot 5^{1/2} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$= 5^{\frac{2}{2}}$

$= 5^{1}$

$= 5$

$5^{1/2} \cdot 5^{1/2}$

$= 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$= 5^{1}$

$= 5$

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

Ces exemples indiquent :

- qu'élever un nombre à l'exposant $\frac{1}{2}$ équivaut à extraire sa racine carrée ;

$$5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$$
$$= 5^{\frac{3}{3}}$$
$$= 5^{1}$$
$$= 5$$

$$5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$$
$$= 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$$
$$= 5^{1}$$
$$= 5$$

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$$
$$= \sqrt[3]{125}$$
$$= 5$$

Ces exemples indiquent :

- qu'élever un nombre à l'exposant $\frac{1}{3}$ équivaut à extraire sa racine cubique, et ainsi de suite.

Conclusion :

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

$$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$$

Les puissances qui ont un exposant rationnel dont le numérateur est 1

Si n est un nombre naturel strictement positif et que x est un nombre rationnel, alors $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

$$8^{1/2} = \sqrt{8}$$

$$8^{1/3} = \sqrt[3]{8}$$

$$8^{1/4} = \sqrt[4]{8}$$

Exemple 1 Évaluer des puissances de la forme $a^{\frac{1}{n}}$

Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $27^{\frac{1}{3}}$

b) $0{,}49^{\frac{1}{2}}$

c) $(-64)^{\frac{1}{3}}$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

a) $27^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{27}$

$= 3$

b) $0{,}49^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{0{,}49}$ ou $\sqrt{\frac{49}{100}}$

$= 0{,}7$

$= \frac{7}{10}$

c) $(-64)^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{-64}$

$= -4$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{4}{9}}$

$= \frac{2}{3}$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $1\,000^{\frac{1}{3}}$

b) $0{,}25^{\frac{1}{2}}$

c) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

d) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

a) $1\,000^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{1000}$

$= 10$

b) $0{,}25^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{0{,}25}$ ou $\sqrt{\frac{25}{100}}$

$= 0{,}5$ $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

c) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{-8} = -2$

d) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

$= \frac{2}{3}$

Note: Les exposants peuvent aussi être écrits sous forme décimale.

$$32^{1/5} = 32^{0,2} \quad 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$16^{1/4} = 16^{0,25} \quad 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$25^{1/2} = 25^{0,5}$$

Comment peux-tu vérifier tes réponses ?

à la calculatrice!!

Puisque tu peux exprimer une fraction comme un nombre décimal, fini ou périodique, tu peux interpréter des puissances ayant un exposant décimal ; par exemple, si $0{,}2 = \frac{1}{5}$, alors $32^{0{,}2} = 32^{\frac{1}{5}}$.

Tu peux évaluer $32^{\frac{1}{5}}$ et $32^{0{,}2}$ à l'aide d'une calculatrice pour montrer que les deux expressions ont la même valeur.

```
32^(1/5)
                2
```

```
32^0.2
                2
```

Évalue :

$144^{0{,}5} = 144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$

$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$243^{0{,}2} = 243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$

$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$4096^{0{,}25} = 4\,096^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4\,096} = 8$

Appris en 9e année:

Multiplier les puissances

Exprime par une seule puissance.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Exemple:

$$(2^5)^2 = (2^5)(2^5) = 2^{10}$$

Si on a UNE base liée à deux exposants un à l'intérieur et un à l'extérieur d'un parenthèse), on multiplie ensemble les exposants.

Exemples: $(3^3)^4 = 3^{12}$

$(2^6)^3 = 2^{18}$ $(5^2)^8 = 5^{16}$

Exprime par une seule puissance.

$(4^2)^6 = 4^{12}$

$((-3)^3)^5 = (-3)^{15}$

$\left(\frac{1^2}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$

Évalue de deux façons: $8^{2/3}$

$8^{2/3}$	$8^{2/3}$

Évalue de deux façons: $8^{2/3}$

$8^{2/3}$

$= 8^{\frac{1}{3} \cdot 2}$

$= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2$

$= 2^2$

$= 4$

$8^{2/3}$

$= 8^{2 \cdot \frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{8^2}$

$= \sqrt[3]{64}$

$= 4$

Exemple: Écris sous la forme d'un radical de deux façons.

exposant

$20^{3/4}$ indice

$\left(\sqrt[4]{20}\right)^3$ ou $\sqrt[4]{20^3}$

Pour saisir la signification d'une puissance telle que $8^{\frac{2}{3}}$, étends la loi des exposants $(a^m)^n = a^{mn}$ aux cas où m et n sont des nombres rationnels.

Écris l'exposant $\frac{2}{3}$ sous la forme $\frac{1}{3} \cdot 2$ ou $2 \cdot \frac{1}{3}$.

$$\text{Alors, } 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2} \qquad \text{ou}$$
$$= \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2$$

Extrais la racine cubique de 8, puis élève le résultat au carré.

$$\text{Alors, } 8^{\frac{2}{3}} = 2^2$$
$$= 4$$

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{2 \cdot \frac{1}{3}}$$
$$= (8^2)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \sqrt[3]{8^2}$$

Élève 8 au carré, puis extrais la racine cubique du résultat.

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64}$$
$$= 4$$

Ces exemples illustrent que le numérateur d'un exposant rationnel représente une puissance et que son dénominateur représente une racine. L'ordre dans lequel tu évalues la racine et la puissance n'a pas d'importance.

Les puissances qui ont un exposant rationnel

Si m et n sont des nombres naturels strictement positifs et que x est un nombre rationnel, alors

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \quad \text{et} \quad x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Exemple: $20^{3/4}$

$20^{\frac{3}{4}}$

$20^{\frac{1}{4}\cdot 3}$

$\left(\sqrt[4]{20}\right)^3$

$20^{\frac{3}{4}}$

$20^{3\cdot\frac{1}{4}}$

$\sqrt[4]{20^3}$

Exemples: Écris sous la forme d'un radical de deux façons.

exposant

$32^{4/5}$ ← indice

$\left(\sqrt[5]{32}\right)^4 = 2^4 = 16$

ou

$\sqrt[5]{32^4}$

$27^{2/3}$

$\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

ou

$\sqrt[3]{27^2}$

Exemple 2

Réécrire des puissances ayant un exposant rationnel sous la forme d'un radical et vice versa

a) Écris $40^{\frac{2}{3}}$ sous la forme d'un radical de 2 façons.

$40^{\frac{2}{3}}$ $\left(\sqrt[3]{40}\right)^2$ ou $\sqrt[3]{40^2}$

a) Écris $40^{\frac{2}{3}}$ sous la forme d'un radical de 2 façons.

SOLUTION

a) Applique $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ ou $\sqrt[n]{a^m}$.

$$40^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{40}\right)^2 \text{ ou } \sqrt[3]{40^2}$$

Exemple 2

Réécrire des puissances ayant un exposant rationnel sous la forme d'un radical et vice versa

b) Écris $\sqrt{3^5}$ et $\left(\sqrt[3]{25}\right)^2$ sous la forme d'une puissance ayant un exposant rationnel.

$\sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$

$\left(\sqrt[3]{25}\right)^2 = 25^{\frac{2}{3}}$

b) Écris $\sqrt{3^5}$ et $\left(\sqrt[3]{25}\right)^2$ sous la forme d'une puissance ayant un exposant rationnel.

SOLUTION

b) Applique $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

$$\sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$$

L'indice du radical est 2.

Applique $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$.

$$\left(\sqrt[3]{25}\right)^2 = 25^{\frac{2}{3}}$$

VÉRIFIE TA COMPRÉHENSION

2. **a)** Écris $26^{\frac{2}{5}}$ sous la forme d'un radical de 2 façons.

b) Écris $\sqrt{6^5}$ et $\left(\sqrt[4]{19}\right)^3$ sous la forme d'une puissance ayant un exposant rationnel.

2. **a)** Écris $26^{\frac{2}{5}}$ sous la forme d'un radical de 2 façons.

$\left(\sqrt[5]{26}\right)^2$ ou $\sqrt[5]{26^2}$

b) Écris $\sqrt{6^5}$ et $\left(\sqrt[4]{19}\right)^3$ sous la forme d'une puissance ayant un exposant rationnel.

$$\sqrt[2]{6^5} = 6^{\frac{5}{2}}$$

$$\left(\sqrt[4]{19}\right)^3 = 19^{\frac{3}{4}}$$

[Réponses : a) $\left(\sqrt[5]{26}\right)^2$ ou $\sqrt[5]{26^2}$;

b) $6^{\frac{5}{2}}$, $19^{\frac{3}{4}}$]

Travail à compléter:

Page 227

Questions

3 à 10

Page 227

1. Si a est un nombre rationnel et n est un nombre naturel strictement positif, que représente $a^{\frac{1}{n}}$?

2. Si a est un nombre rationnel, et m et n sont des nombres naturels strictement positifs, que représente $a^{\frac{m}{n}}$?

3. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) $16^{\frac{1}{2}}$ b) $36^{\frac{1}{2}}$ c) $64^{\frac{1}{3}}$

d) $32^{\frac{1}{5}}$ e) $(-27)^{\frac{1}{3}}$ f) $(-1\,000)^{\frac{1}{3}}$

4. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

Page 227

a) $100^{0,5}$ b) $81^{0,25}$
c) $1\,024^{0,2}$ d) $(-32)^{0,2}$

5. Écris chaque puissance sous la forme d'un radical.

a) $36^{\frac{1}{3}}$ b) $48^{\frac{1}{2}}$ c) $(-30)^{\frac{1}{5}}$

6. Écris chaque radical sous la forme d'une puissance.

a) $\sqrt{39}$ b) $\sqrt[4]{90}$
c) $\sqrt[3]{29}$ d) $\sqrt[5]{100}$

Page 227

7. Évalue chaque puissance sans utiliser de calculatrice.

a) 8^0 b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $8^{\frac{2}{3}}$
d) $8^{\frac{3}{3}}$ e) $8^{\frac{4}{3}}$ f) $8^{\frac{5}{3}}$

8. Écris chaque puissance sous la forme d'un radical.

a) $4^{\frac{2}{3}}$ b) $(-10)^{\frac{3}{5}}$ c) $2,3^{\frac{3}{2}}$

Page 227

9. Un cube a un volume de 350 cm^3. Écris la longueur d'arête du cube sous la forme d'un radical et sous la forme d'une puissance.

10. Écris chaque puissance sous la forme d'un radical.

a) $48^{\frac{2}{3}}$ b) $(-1,8)^{\frac{5}{3}}$ c) $\left(\frac{3}{8}\right)^{2,5}$

Travail à compléter:

Page 227

Questions

3 à 10